1 Oppgave 1

a)

$$f(x) = 5x^4 - 3x^2 - x^{-2} \text{ gir } f'(x) = 20x^3 - 6x + 2x^{-3}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2 - x^{-1}}{x+3} \text{ gir } g'(x) = \frac{\left(2x + x^{-2}\right)(x+3) - x\left(x^2 - x^{-1}\right)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{-x^5 + 2x^4 + 6x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 (x+3)^2} \end{aligned}$$

c)

$$h(x) = f(x)(x-a) \text{ gir } h'(x) = f'(x)(x-a) + f(x)$$

,

d)

$$f(x) = g(x, x^2) \text{ gir } f'(x) = g_1' + 2xg_2'$$

e)

$$F(x,y) = \frac{g(x,y)}{h(x)}$$

gir

$$\begin{aligned} F_x' &= \frac{g_x'(x,y)h(x) - h'(x)g(x,y)}{(h(x))^2} \\ F_y' &= \frac{g_y'(x,y)}{h(x)} \end{aligned}$$

f)Når

$$z = k(t,s) = (3t - 2s)^2 + s \text{ og } s = x^2 y \text{ og } t = xy$$

så blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} \\ &= 2(3t-2s)3y + (2(3t-2s)(-2)+1)\,2xy \\ &= 6(3t-2s)y - 8(3t-2s)xy + 2xy \\ &= xy^2(6-8x)(3-2x) + 2xy \end{aligned}$$

Merk her at

$$(3t - 2s) = 3xy - 2x^2 y = xy(3 - 2x)$$

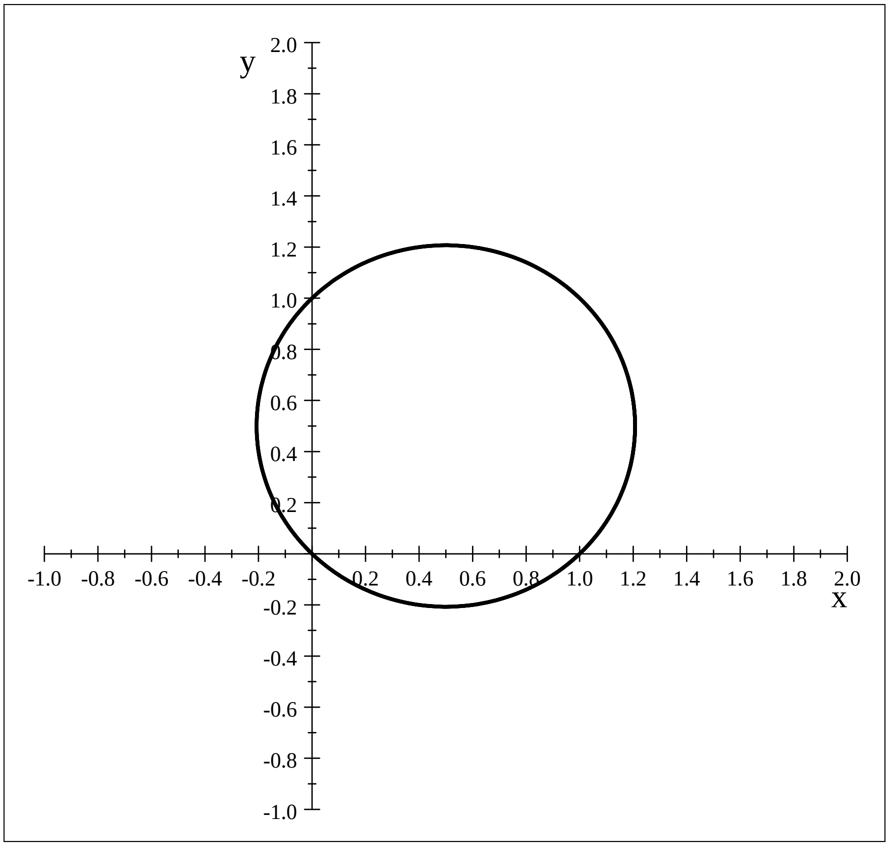
Tilsvarende er

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} \\ &= 2(3t-2s)3x + (2(3t-2s)(-2)+1)\,x^2 \\ &= 6(3t-2s)x - 4(3t-2s)x^2 + 2xy \\ &= 2x^2y(3-2x)^2 + 2xy \end{aligned}$$

2 Oppgave 2

Vi har gitt at

$$x^2 + y^2 = x + y$$



Ved implisitt derivasjon finner vi da

$$\begin{aligned} 2x + 2yy' &= 1 + y' \\ 2x - 1 &= (1 - 2y)y' \\ y' &= -\frac{2x-1}{2y-1} = -\frac{x - \frac{1}{2}}{y - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

3 Oppgave 3

Oppgave a)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^4 - 3x + y^4 + 3y + xy \\
f'_x &= 4x^3 - 3 + y \\
f'_y &= 4y^3 + 3 + x \\
f'_x(1,-1) &= 4 - 3 - 1 = 0 \\
f'_y(1,-1) &= -4 + 3 + 1 = 0
\end{aligned}$$

Oppgave b)

$$\begin{aligned}
f''_{xx} &= 12x^2 \geq 0 \text{ som tyder på minimum} \\
f''_{yy} &= 12y^2 \geq 0 \text{ som tyder på minimum}
\end{aligned}$$

mens

$$f''_{xy} = 1$$

Altså er

$$f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 144x^2y^2 - 1 \begin{array}{cc} > 0 & \text{lokalt rundt } x = 1, y = -1 \\ < 0 & \text{i punktet } x = y = 0 \end{array}$$

Om noen har evaluert $f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$ bare lokalt i $x = 1, y = -1$ og konkludert med at det er et minimum, så gir det ikke full uttelling. Men om de påpeker at det er et lokalt minimum, så er det flott.

Om noen har sett at $f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 < 0$ for noen verdier av x og y og konkluderer med at de tilstrekkelige betingelsene for et globalt minimum ikke er tilfredsstilt så flott.

Det beste er selvsagt om de ser at det er et lokalt minimum men at de ikke kan konkludere med om det er et globalt minimum

4 Oppgave 4

a) Kjærneregelen

$$h'(r) = f'_x x^{*\prime}(r) + f'_y y^{*\prime}(r) + f'_r$$

b)

$$\begin{aligned}
L &= f - \lambda g \\
L'_x &= f'_x - \lambda g'_x = 0 \Longrightarrow f'_x = \lambda g'_x \\
L'_y &= f'_y - \lambda g'_y = 0 \Longrightarrow f'_y = \lambda g'_y
\end{aligned}$$

c) Ligningen følger som i a) ved bruk av $dg/dr = 0$

$$g'_x x^{*\prime}(r) + g'_y y^{*\prime}(r) + g'_r = 0$$

Gir

$$g'_x x^{*\prime}(r) + g'_y y^{*\prime}(r) = -g'_r$$

d) Vi starter med resultatet i a)

$$h'(r) = f'_x x^{*\prime}(r) + f'_y y^{*\prime}(r) + f'_r$$

setter inn for f'_x og f'_y fra b)

$$\begin{aligned} h'(r) &= f'_x x^{*\prime}(r) + f'_y y^{*\prime}(r) + f'_r \\ &= \lambda \left(g'_x x^{*\prime}(r) + g'_y y^{*\prime}(r) \right) + f'_r \end{aligned}$$

De to leddene i parentes er venstresiden av ligningen i c

$$\begin{aligned} h'(r) &= \lambda \left(g'_x x^{*\prime}(r) + g'_y y^{*\prime}(r) \right) + f'_r \\ &= \lambda \left(-g'_r \right) + f'_r \\ &= f'_r - \lambda g'_r = L'_r \end{aligned}$$

Hvor den siste likheten følger rett av definisjonen av L.

Obligatorisk innlevering ECON 2200 – våren 2012

Veiledning oppgave 5

a) Med gitt mengde realkapital, vil vi ha $x = An^{\alpha}(\overline{k})^{\beta}$, som vi kan løse ut for n som: $n^{\alpha} = \frac{1}{A}x(\overline{k})^{-\beta} \Rightarrow n(x;\overline{k}) = \left(\frac{x}{A}\cdot(\overline{k})^{-\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Dermed for gitt produktmengde $x = x_0$, er nødvendig innsats av arbeidskraft på kort sikt bestment av:

$n(x_0;\overline{k}) = \left(\frac{x_0}{A}\cdot(\overline{k})^{-\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

b) Kostnadsfunksjonen er dermed:

$C(x;w,q,\overline{k}) = q\overline{k} + wn(x;\overline{k}) = q\overline{k} + w\left(\frac{x}{A}\cdot(\overline{k})^{-\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = q\overline{k} + wA^{-\frac{1}{\alpha}}(\overline{k})^{\frac{-\beta}{\alpha}}x^{\frac{1}{\alpha}}$, der første ledd er den faste kostnaden, mens det andre er den variable kostnaden. Variabel gjennomsnitts- eller enhetskostnad (VEK) er dermed:

$VEK = \dfrac{w\left(\frac{x}{A}\cdot(\overline{k})^{-\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{x} = wA^{-\frac{1}{\alpha}}(\overline{k})^{\frac{-\beta}{\alpha}}x^{\frac{1}{\alpha}-1}$ og grensekostnad gitt ved

$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{w}{\alpha}A^{-\frac{1}{\alpha}}(\overline{k})^{\frac{-\beta}{\alpha}}x^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{1}{\alpha}\cdot VEK$.

c) La $A = 1, \alpha = 0,5, og\ \beta = 0,25$. Da er kostnadsfunksjonen,

$C(x;w,q,\overline{k}) = q\overline{k} + w(\overline{k})^{\frac{-1}{2}}x^2$ og profitten er $\pi(x) = px - C(x;w,q,\overline{k})$. Vi har at $\pi'(x) = p - 2w(\overline{k})^{\frac{-1}{2}}\cdot x$ og $\pi''(x) = -2w(\overline{k})^{\frac{-1}{2}} < 0$. Siden $\pi'(0) = p > 0$, vil dette problemet ha en positiv løsning bestemt av $\pi'(x^*) = 0 \Leftrightarrow p - 2w(\overline{k})^{\frac{-1}{2}}\cdot x^* = 0$, med $x^* = \frac{p\sqrt{\overline{k}}}{2w} = s(p,w,\overline{k})$.

d) Vi har: $\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\sqrt{\overline{k}}}{2w} > 0$, $\frac{\partial s}{\partial w} = -\frac{p\sqrt{\overline{k}}}{2w^2} = -\frac{s(p,w,\overline{k})}{w} < 0$,

$s(tp,tw,\overline{k}) = \frac{tp\sqrt{\overline{k}}}{2tw} = \frac{p\sqrt{\overline{k}}}{2w} = s(p,w,\overline{k})$, $\frac{\partial s}{\partial \overline{k}} = \frac{p}{2w}\frac{1}{2}(\overline{k})^{-\frac{1}{2}} = \frac{p}{4w\sqrt{\overline{k}}} > 0$

Veiledning oppgave 6

i) Med produktfunksjonen $y = F(n,E) = An^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}$, ser vi at en *t*-dobling av innsatsfaktorene gir en *t*-dobling i produktmengden;

$F(tn,tE) = A(tn)^{\frac{1}{2}}\cdot(tE)^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}An^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}} = tF(n,E)$.

At marginal teknisk substitusjonsbrøk er avtakende ser vi av: For gitt produktmengde vil $MTSB = \frac{-dE}{dn} = \frac{\frac{\partial F}{\partial n}}{\frac{\partial F}{\partial E}} = \frac{\frac{1}{2}An^{-\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}An^{\frac{1}{2}}E^{-\frac{1}{2}}} = \frac{E}{n}$. Siden vi, for gitt produktmengde $y = y_0$, fra produktfunksjonen har at

$\frac{y_0}{A} = (nE)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow nE = \left(\frac{y_0}{A}\right)^2 \Rightarrow E = \frac{\left(\frac{y_0}{A}\right)^2}{n} = \frac{y_0^2}{A^2 n}$, vil $MTSB = \left[\frac{y_0}{An}\right]^2$. Vi ser at denne er avtakende i n.

ii) Kostnadsminimeringsproblemet til bedriften er:
$Min_{(n,E)} \left\{ wn + qE \,\middle|\, F(n,E) = x\,(gitt) \right\}$ der $F(n,E) = An^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}$. Siden vi har antatt at dette problemet har indre løsning, vet vi at det finnes en konstant λ slik at den kostnadsminimerende faktorkombinasjonen (n^0, E^0) må oppfylle følgende betingelser, med x som gitt kvantum:

$$\frac{\partial L(n^0, E^0, \lambda)}{\partial n} = w - \lambda \frac{\partial F(n^0, E^0)}{\partial n} = w - \frac{\lambda}{2}\frac{x}{n^0} = 0$$

$$\frac{\partial L(n^0, E^0, \lambda)}{\partial E} = q - \lambda \frac{\partial F(n^0, E^0)}{\partial E} = q - \frac{\lambda}{2}\frac{x}{E^0} = 0$$

der Lagrangefunksjonen er $L(n, E, \lambda) = wn + qE - \lambda\left[A\sqrt{nE} - x\right]$. Vi kan eliminere Lagrangemultiplikatoren og kommer fram til "tangeringsbetingelsen":
$MTSB(n^0, E^0) = \frac{F_n(n^0, E^0)}{F_E(n^0, E^0)} = \frac{w}{q}$, der $MTSB$ angir den marginale tekniske substitusjonsbrøk. Denne angir det marginale tekniske bytteforholdet for gitt produksjon; dvs. hvor mange enheter energi som kan frigjøres per enhets økning i arbeidsinnsatsen, og uten at produksjonen endres. "Tangeringsbetingelsen", sammen med produksjonskravet $x = F(n,E) = A\sqrt{nE}$, gir oss to likninger til å bestemme faktorfunksjonene eller betingede faktoretterspørselsfunksjonene $n(x; w, q)$ og $E(x; w, q)$. Disse betingelsene må gjelde uansett hvor mye som skal produseres (gitt at vi har indre løsning). Med den spesifiserte produktfunksjonen, følger det at tangeringsbetingelsen kan skrives som $\frac{E}{n} = \frac{w}{q}$; dvs. $E = \frac{w}{q}N$, uavhengig av x som betyr at substitumalen i dette tilfelle er en rett linje (eller stråle) gjennom origo.

Sett $E = \dfrac{w}{q} n$ inn i produktfunksjonen, og med gitt produktmengde, finner vi:

$x = A\sqrt{nE} = A\sqrt{\frac{w}{q}n^2} = An\sqrt{\frac{w}{q}} = An\left(\frac{w}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$, som vi kan løse for

$n(x;w,q) = \frac{1}{A}\left(\frac{w}{q}\right)^{-0.5} x = \frac{1}{A}\dfrac{1}{\left(\frac{w}{q}\right)^{0,5}} x = \frac{1}{A}\left(\dfrac{q}{w}\right)^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{A}\left(\sqrt{\frac{q}{w}}\right)x$. Dermed følger

$E(x;w,q) = \dfrac{w}{q}\cdot\frac{1}{A}\left(\sqrt{\frac{q}{w}}\right)x = w^{1-\frac{1}{2}}q^{-1+\frac{1}{2}}\dfrac{x}{A} = \frac{1}{A}\left(\sqrt{\frac{w}{q}}\right)x$. For gitt produktmengde (gitt isokvant) og for gitte faktorpriser (eller mer korrekt gitt faktorprisforhold), kan løsningen illustreres som i figur 3.9 i boka.

iii) Kostnadsfunksjonen, $C(x;w,q)$, er nå den minimerte verdien av samlet faktorutlegg: $C(x;w,q) = wn(x;w,q) + qE(x;w,q) = w\cdot\frac{1}{A}\left(\sqrt{\frac{q}{w}}\right)x + q\cdot\frac{1}{A}\left(\sqrt{\frac{w}{q}}\right)x$. Dette kan "ordnes", og vi finner:

$$C(x;w,q) = \frac{x}{A}\left[w^{1-0,5}q^{0.5} + q^{1-0,5}w^{0,5}\right] = \frac{x}{A}\left[(wq)^{0,5} + (wq)^{0,5}\right] = \frac{2}{A}\left(\sqrt{wq}\right)\cdot x = \phi(w,q)\cdot x$$

der $\phi(w,q)$ er enhetskostnadsfunksjonen som er uavhengig av produksjonsskalaen.

iv) Derivasjon gir: $\dfrac{\partial C}{\partial w} = \dfrac{\partial\phi(w,q)}{\partial w}\cdot x = \dfrac{2}{A}\dfrac{1}{2}w^{-0,5}q^{0,5}\cdot x = \frac{1}{A}\left(\sqrt{\frac{q}{w}}\right)\cdot x = n(x;w,q)$; dette er Shephard's lemma. Siden vi har $n(x;w,q) = \phi_w x = \frac{1}{A}\left(\sqrt{\frac{q}{w}}\right)x$, følger det direkte at $\dfrac{\partial n}{\partial w} = \phi_{ww}\cdot x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial w}x < 0$ pga. substitusjon; ser også at dette holder. Siden høyere lønn fører til mindre bruk av arbeidskraft, må energibruken gå opp for at samme produktmengde skal oppnås; dermed siden $\dfrac{\partial C}{\partial q} = E(x,w,q) = \phi_q\cdot x$, må $\dfrac{\partial E}{\partial w} = \phi_{qw}\cdot x > 0$. Viktig å få frem betydningen av *substitusjon*.

Veiledning oppgave 7

Vi har at f er homogen av grad *m* hvis vi kan skrive: $f(tn,tk) = t^m\cdot f(n,k)$.

a) Derivasjon av $f(tn,tk) = t^m\cdot f(n,k)$ med hensyn på *t* (proporsjonal faktorvariasjon) gir:

$$\frac{\partial f(tn,tk)}{\partial(tn)} \cdot \frac{\partial(tn)}{\partial t} + \frac{\partial f(tn,tk)}{\partial(tk)} \cdot \frac{\partial(tk)}{\partial t} = mt^{m-1} f(n,k) \Leftrightarrow$$

$$n \frac{\partial f(tn,tk)}{\partial(tn)} + k \frac{\partial f(tn,tk)}{\partial(tk)} = mt^{m-1} f(n,k)$$

Beregn denne for $t = 1$, som gir: $n \dfrac{\partial f(n,k)}{\partial n} + k \dfrac{\partial f(n,k)}{\partial k} = mf(n,k)$ som er passuslikningen.

b) La $m = 1$. Vi har da: $\dfrac{\partial f(tn,tk)}{\partial(tk)} \dfrac{\partial(tk)}{\partial k} = t^m \dfrac{\partial f(n,k)}{\partial k}$

$$\Leftrightarrow t \cdot \frac{\partial f(tn,tk)}{\partial(tk)} = t^m \frac{\partial f(n,k)}{\partial k} \Leftrightarrow \frac{\partial f(tn,tk)}{\partial(tk)} = t^{m-1} \frac{\partial f(n,k)}{\partial k}$$

Når $m = 1$, må $\dfrac{\partial f(tn,tk)}{\partial(tk)} = t^0 \dfrac{\partial f(n,k)}{\partial k} = \dfrac{\partial f(n,k)}{\partial k}$

Dette betyr at for en produktfunksjon som er homogen av grad én, vil grenseproduktivitetene være upåvirket ved en proporsjonal faktorvariasjon (bevegelse langs en faktorstråle). Dermed vil substitumalen, som for gitt faktorprisforhold, viser samlingen av alle punkter langs hvilken MTSB (lik forholdet mellom grenseproduktivitetene) er konstant og lik det gitte faktorprisforholdet, være en faktorstråle (en rett linje).